國立政治大學 應用數學系 102 學年度第 二 學期　學科 考試試題

NATIONAL CHENGCHI UNIVERSITY EXAMINATION FORM

考試科目 Course	應用代數	開課系級 Dept, & Class	研究所	日期 Date, Period	103 年 3 月 3 日 上午 9:00~12:00	試題編號 Course No.	

本試卷共有 6 個題目，
碩士班：請選 5 題作答，每題 20 分，請在答案卷最前面註明所選的 5 題，否則依學生作答之前 5 題計分。
博士班：6 題全做答，每題 17 分，超過 100 分則以 100 分計。

1. State and prove the First Isomorphism Theorem (for groups.)

2. Let G be a group of order 8.
   (a) If G is Abelian, list all possible structures of G.
   (b) If G is non-Abelian, show that G has an element a of order 4.
   (c) Suppose G is non-Abelain and there is an element $b \in G \setminus \langle a \rangle$ of order 2. Show that G is the Dihedral group D_4.

3. Let G be a group. Let p be a prime such that p divides $|G|$.
   (a) State the definition of p-Sylow subgroups for G.
   (b) Suppose $|G| = p^2q$, where p, q are two distinct primes. Show that G has a normal Sylow subgroup.

4. Let $\mathbb{F} = \mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{5})$. Find an element a such that
$$\mathbb{Q}(a) = \mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{5}).$$
   Justify your answer.

5. Let R be a commutative ring with unity.
   (a) State the definition of R being an integral domain.
   (b) Let A be an ideal of R. Show that R/A is an integral domain if and only if A is prime.

6. Let $\mathbb{E}$ be an extension field of the field $\mathbb{F}$.
   (a) State the definition of the Galois group $\mathrm{Gal}(E/F)$.
   (b) Determine the Galois group $\mathrm{Gal}(Q(\sqrt[3]{2})/Q)$. Justify your answer.

本考試：☑ 不需使用簡易計算機，☐ 使用簡易計算機　　←請出題老師勾選，謝謝！

[redacted] 簽章）2014 年 3 月 3 日 Signature & date）　　試題隨卷繳交

國立政治大學 應用數學系 102 學年度第 二 學期 學科 考試試題

NATIONAL CHENGCHI UNIVERSITY EXAMINATION FORM

考試科目 Course	實變函數論	開課系級 Dept, & Class	研究所	日期 Date, Period	103 年 3 月 3 日 上午 9:00~12:00	試題編號 Course No.	

本試卷共有 6 個題目，
碩士班：請選 5 題作答，每題 20 分，請在答案卷最前面註明所選的 5 題，否則依學生作答之前 5 題計分。
博士班：6 題全做答，每題 17 分，超過 100 分則以 100 分計。

In the following, $(X, \mathcal{S}, \mu)$ denotes a measure space and m_n is the Lebesgue measure on $\mathbb{R}^n$.

1. Let Ω be a domain in $\mathbb{R}^n$ and $\bar{\Omega}$ be its closure.
   (a) Show that if Ω is bounded, then $m_n(\Omega) < \infty$ and $\bar{\Omega}$ is compact.
   (b) If Ω is bounded and $f : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$ is continuous, then f attains its max. and min. values in $\bar{\Omega}$.
   (c) Let Ω be bounded and $f : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$ be a non-negative continuous function. Does

$$\lim_{k \to \infty} \left(\int_{\bar{\Omega}} f(x)^k \, dm_n(x) \right)^{1/k}$$

   exist? If yes, identifying its value.

2. Let $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ be a continuous function and $f(0) = 101$.
   (a) Show that $f(x^n)$ is Lebesgue measurable on $[0,1]$ for all $n \geq 1$.
   (b) Does $\lim_{n \to \infty} \int_0^1 f(x^n) \, dm_1(x)$ exist? If yes,

本考試：☑ 不需使用簡易計算機，☐ 使用簡易計算機　　←請出題老師勾選，謝謝！

[redacted] 簽章）103 年 2 月 24 日 Signature & date)　　試題隨卷繳交

命題紙使用說明：試題將用原件印製，敬請使用黑色墨水正楷書寫或打字（紅色不能製版請勿使用）。

Remarks ：For the convenience of reprinting please Write questions in black or blue-black (but no red) ink.

國立政治大學 應用數學系 102 學年度第 二 學期 學科 考試試題

NATIONAL CHENGCHI UNIVERSITY EXAMINATION FORM

考試科目 Course	實變函數論	開課系級 Dept, & Class	研究所	日期 Date, Period	103 年 3 月 3 日 上午 9:00~12:00	試題編號 Course No.	

本試卷共有 6 個題目，
碩士班：請選 5 題作答，每題 20 分，請在答案卷最前面註明所選的 5 題，否則依學生作答之前 5 題計分。
博士班：6 題全做答，每題 17 分，超過 100 分則以 100 分計。

Compute its value.

3. Let I be an arbitrary nonempty index set. and $a^{(n)}, n \geq 1$, a are nonnegative functions on I. Show that if $a^{(n)} \uparrow a$ on I as $n \to \infty$, then

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i\in I} a^{(n)}(i) = \sum_{i \in I} a(i).$$

4. Let $f(t) = t^{-1/2} e^{-t}$, $t \in (0,\infty)$. Show that f is Lebesgue integrable on $(0,\infty)$ and compute its Lebesgue integral on $(0,\infty)$.

5. Let $f: X \to [-\infty,\infty]$ be a measurable function and $\int_X f\,d\mu$ exist. Define

$$\nu(E) = \int_E f\,d\mu, \quad E \in \mathcal{S}.$$

(a) Show that ν is a well-defined signed measure on $(X, \mathcal{S})$.

(b) Write ν as a difference of two measure on $(X, \mathcal{S})$

本考試：☑ 不需使用簡易計算機，□ 使用簡易計算機 ←請出題老師勾選，謝謝！

[redacted]（簽章）103 年 2 月 24 日
(Signature & date)

試題隨卷繳交

國立政治大學 應用數學系 102 學年度第 二 學期 學科 考試試題

NATIONAL CHENGCHI UNIVERSITY EXAMINATION FORM

考試科目 Course	實變函數論	開課系級 Dept, & Class	研究所	日期 Date, Period	103 年 3 月 3 日 上午 9:00~12:00	試題編號 Course No.	

本試卷共有 6 個題目，
碩士班：請選 5 題作答，每題 20 分，請在答案卷最前面註明所選的 5 題，否則依學生作答之前 5 題計分。
博士班：6 題全做答，每題 17 分，超過 100 分則以 100 分計。

6. Let $K \subseteq \mathbb{R}^n$ be a compact set and $C(K)$ be the space of all continuous real-valued functions on K. Define

$$\|f\| = \sup_{x \in K} |f(x)|, \quad f \in C(K).$$

(a) Show that $(C(K), \|\cdot\|)$ is a normed linear space over $\mathbb{R}$.

(b) Show that $f_n \to f$ in $C(K)$ w.r.t. $\|\cdot\|$ if, and only if $f_n \to f$ uniformly on K.

本考試：☑ 不需使用簡易計算機，☐ 使用簡易計算機 ←請出題老師勾選，謝謝！

[redacted]（簽章）103 年 2 月 24 日
(Signature & date)

試題隨卷繳交

（榮譽第一）

第　頁/共　頁

國立政治大學 應用數學系 102 學年度第二學期　學科 考試試題

NATIONAL CHENGCHI UNIVERSITY EXAMINATION FORM　Page　/Total

考試科目 Course	組合學	開課系級 Dept, & Class	研究所	日 期 Date, Period	103 年 3 月 3 日 上午 9:00~12:00	試題編號 Course No.	

本試卷共有 6 個題目，
碩士班：請選 5 題作答，每題 20 分，請在答案卷最前面註明所選的 5 題，否則依學生作答之前 5 題計分。
博士班：6 題全做答，每題 17 分，超過 100 分則以 100 分計。

1. Show that every tree with e edges has $(e+1)$ vertices.
2. Show that $\sum_{k=s-n}^{m-r} C_r^{m-k} C_s^{n+k} = C_{r+s+1}^{m+n+1}$, where $0 \le r \le m$, $0 \le s \le n$.
3. Find the number of regions formed when n mutually intersecting planes are drawn in three-dimensional space such that no four planes intersect at a common point and no two planes have parallel intersection lines in a third plane.
4. Given $(2n)$ points on a circle, we may obtain n disjoint pairs of points, and connect each pair of points, we get n chords. How many ways are there such that the n chords are not crossing?
5. Find the number of derangements of $\{1, 2, \cdots, n\}$.
6. How many necklaces of eight beads are there using blue beads, green beads, red beads, or yellow beads?

本考試：☑ 不需使用簡易計算機，☐ 使用簡易計算機　←請出題老師勾選，謝謝！

[redacted] 簽章）103 年 2 月 24 日
Signature & date)

試題隨卷繳交

（榮譽第一）

國立政治大學 應用數學系 102 學年度第 二 學期 學科 考試試題

NATIONAL CHENGCHI UNIVERSITY EXAMINATION FORM

考試科目 Course	數理統計	開課系級 Dept, & Class	研究所	日期 Date, Period	103 年 3 月 3 日 上午 9:00~12:00	試題編號 Course No.	

本試卷共有 6 個題目，

碩士班：請選 5 題作答，每題 20 分，請在答案卷最前面註明所選的 5 題，否則依學生作答之前 5 題計分。

博士班：6 題全做答，每題 17 分，超過 100 分則以 100 分計。

To earn your credits, you must show your work.

You don't have to use the calculator. However, you may use the information at the end of page 2.

Model E: Observe X_i , i=1, …, n, independent, with $X_i \sim E(i\theta)$, $\theta > 0$, that is,

$$f(x_i;\theta) = (i\theta)^{-1} \exp\left(\frac{-x_i}{i\theta}\right), \theta>0.$$

1. Assume model E is given. (a) Find the MLE $\hat{\theta}$ of θ; (b) show that $2n\hat{\theta}/\theta$ has a chi-square distribution with 2n degrees of freedom; (c) find a complete sufficient statistic for this model; (d) Show that $\hat{\theta}$ is consistent.

2. Assume model E is given. (a) Find the best unbiased estimator of θ; (b) show that the best unbiased estimator of θ is efficient; (c) find a $1-\alpha$ confidence interval for θ and a $1-\alpha$ confidence interval for $\frac{1}{\theta}$; (d) find the UMP (uniformly most powerful) size α test for testing that $\theta = 2$ against $\theta < 2$.

3. Let $\mathbf{X}_n = (X_{1n}, \dots, X_{kn}) \sim M_k(n, (p_1, \dots, p_k))$. That is, $\mathbf{X}_n$ is a k-dimensional multinomial distribution with parameters n and $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_k)$, where $p_1 + \cdots + p_k = 1$. Let $W_n = \sum_{i=1}^{k} a_i X_{in}$, $b_n = EW_n$, $c_n^2 = \text{var}(W_n)$. Show that $\frac{W_n - b_n}{c_n} \xrightarrow{d} Z \sim N(0,1)$ as $n \to \infty$.

4. State and prove the weak law of large numbers.

本考試：☑ 不需使用簡易計算機，□ 使用簡易計算機 ←請出題老師勾選，謝謝！

[redacted] 簽章） 2014 年 2 月 24 日 Signature & date） | 試題隨卷繳交

國立政治大學 應用數學系 102 學年度第 二 學期　學科 考試試題

NATIONAL CHENGCHI UNIVERSITY EXAMINATION FORM　　

考試科目 Course	數理統計	開課系級 Dept, & Class	研究所	日期 Date, Period	103 年 3 月 3 日 上午 9:00~12:00	試題編號 Course No.	

本試卷共有 6 個題目，
碩士班：請選 5 題作答，每題 20 分，請在答案卷最前面註明所選的 5 題，否則依學生作答之前 5 題計分。
博士班：6 題全做答，每題 17 分，超過 100 分則以 100 分計。

5. Suppose that a lie detector test has the following properties. If the suspect is telling the truth, the lie detector will correctly say so with probability 0.85; if the suspect is lying, it will correctly identifying this with probability 0.99. If 90% of the people are telling the truth, find the probability that a person is actually lying when the test says that he or she is.

6. Prove or give a derivation of the following theorem.

Let T(X) be an unbiased estimator of $\tau(\theta)$. Then

$$\operatorname{var}\big(T(X)\big) \geq \frac{(\tau'(\theta))^2}{I(\theta)},$$

with equality if and only if

$$L_x(\theta) \equiv \exp\left(h(\theta)T(X) + k(\theta) + u(X)\right)$$

for some functions $h(\theta)$, $k(\theta)$, and $u(X)$. Here $I(\theta)$ is the Fisher information in X.

Note: If a random variable X has a chi-square distribution with k degrees of freedom, written $X \sim \chi^2_k$, then X has the density function $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{\left(\frac{k}{2}\right)-1} e^{-x/2}}{2^{k/2}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} & x > 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$, where k is a positive integer.

本考試：☑ 不需使用簡易計算機，□ 使用簡易計算機　　←請出題老師勾選，謝謝！

[redacted]（簽章）2014 年 2 月 24 日　(Signature & date)　　試題隨卷繳交