

考試科目 Course	微分方程式	開課系級 Dept, & Class	研究所	日期 Date, Period	103 年 9 月 22 日 下午 13:00~16:00	試題編號 Course No.	
----------------	-------	--------------------------	-----	-----------------------	----------------------------------	-----------------------	--

本試卷共有 6 個題目，  
 碩士班：請選 5 題作答，每題 20 分，請在答案卷最前面註明所選的 5 題，否則依學生作答之前 5 題計分。  
 博士班：6 題全作答，每題 17 分，超過 100 分則以 100 分計。

1. Consider the equation

$$x' = f(x) + g(x),$$

where  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $f, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Assume that for all  $x \in \mathbb{R}^n$   $\|f(x)\| \leq 1$  and for all  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$

$$\|f(x_1) - f(x_2)\| \leq \|x_1 - x_2\|.$$

Assume also that  $g$  is continuous and for all  $x \in \mathbb{R}^n$  and some  $\epsilon > 0$

$\|g(x)\| \leq \epsilon$ . Show that if  $x_1(t)$  and  $x_2(t)$  are two solutions with  $x_1(0) = x_2(0)$ , then

$$\|x_1(t) - x_2(t)\| \leq \frac{2\epsilon}{L} (e^{Lt} - 1).$$

2. Consider the nonautonomous equation

$$X' = f(t, X),$$

where  $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  is a continuous function. Suppose that there exists a continuous function  $M: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  such that  $\|f(t, X_1) - f(t, X_2)\| \leq M(t)\|X_1 - X_2\|$  for all  $t \in \mathbb{R}$ ,  $X_1, X_2 \in \mathbb{R}^n$ . Show that all solutions are defined on  $(-\infty, \infty)$ .

3. Let  $u(x)$ ,  $v(x)$  and  $w(x)$  be the solutions of the equations  $y''' + y = 0$  satisfying  $u(0) = 1, u'(0) = 0, u''(0) = 0; v(0) = 0, v'(0) = 1, v''(0) = 0; w(0) = 0, w'(0) = 0, w''(0) = 1$ . Without solving the equation show that

(a)  $u'(x) = -w(x)$

(b)  $W(u, v, w) = u^3 - v^3 + w^3 + 3uvw = 1.$

4. Determine the type of stability of the critical point  $(0,0)$  of each of the following systems and sketch the phase portraits.

(a) 
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 7x + y \\ \frac{dy}{dt} = -3x + 4y \end{cases}$$

(b) 
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y \\ \frac{dy}{dt} = 3x - y \end{cases}$$

本考試： 不需使用簡易計算機， 使用簡易計算機

←請出題老師勾選，謝謝！

命題老師： (Teacher)	(簽章) 103 年 9 月 18 日 (Signature & date)	試題隨卷繳交
--------------------	---	--------

命題紙使用說明：試題將用原件印製，敬請使用黑色墨水正楷書寫或打字（紅色不能製版請勿使用）。

Remarks : For the convenience of reprinting please Write questions in black or blue-black ( but no red ) ink.

考試科目 Course	微分方程式	開課系級 Dept, & Class	研究所	日期 Date, Period	103 年 9 月 22 日 下午 13:00~16:00	試題編號 Course No.	
----------------	-------	--------------------------	-----	-----------------------	----------------------------------	-----------------------	--

本試卷共有 6 個題目，

碩士班：請選 5 題作答，每題 20 分，請在答案卷最前面註明所選的 5 題，否則依學生作答之前 5 題計分。

博士班：6 題全作答，每題 17 分，超過 100 分則以 100 分計。

5. Show that the system

$$\frac{dx}{dt} = x(\lambda - (x^2 + (1 + \epsilon^2)y^2)) + \omega y,$$

$$\frac{dy}{dt} = y(\lambda - (x^2 + (1 + \epsilon^2)y^2)) - \omega x$$

has a limit cycle for  $\lambda, \epsilon > 0$ .

6. Find all critical points of the system

$$x_1' = x_2 - x_1^2$$

$$x_2' = 8x_1 - x_2^2$$

and determine whether they are stable, asymptotically stable or unstable.

本考試： 不需使用簡易計算機， 使用簡易計算機

←請出題老師勾選，謝謝！

命題老師： (Teacher)	(簽章) 103 年 9 月 18 日 (Signature & date)	試題隨卷繳交
--------------------	---	--------

命題紙使用說明：試題將用原件印製，敬請使用黑色墨水正楷書寫或打字（紅色不能製版請勿使用）。

Remarks : For the convenience of reprinting please Write questions in black or blue-black ( but no red ) ink.